РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

А.В. Суханов, З.В. Лященко

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Учебно-методическое пособие
для практических работ

Ростов-на-Дону

2017

УДК 681.3(07) + 06

Рецензент – доктор технических наук, профессор М.А. Бутакова

Суханов, А.В.

Интеллектуальные системы и технологии и системы искусственного интеллекта: учебно-методическое пособие для практических работ / А.В. Суханов, З.В. Лященко; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 36 с.

Настоящее пособие знакомит студентов с основами проектирования формальной системы, основными положениями теории искусственных нейронных сетей, продукционными моделями представления знаний, методами исследования приближенных множеств, композициями нечетких отношений, нечеткими числами и операциями над ними.

Предназначено для студентов и магистрантов направлений «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии» и «Механотроника и робототехника», а также для студентов, аспирантов и магистрантов всех специальностей, изучающих дисциплины «Интеллектуальные системы и технологии», «Системы искусственного интеллекта» и смежные дисциплины.

Одобрено к изданию кафедрой «Вычислительная техника и автоматизированные системы управления».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Практическая работа № 1
Проектирование формальной системы

Цель

Освоить основы проектирования формальных систем.

Теоретические сведения

Формальная система (исчисление) – совокупность абсолютно абстрактных объектов, в которой представлены правила оперирования цепочками символов в синтаксической трактовке без учета смыслового содержания.

Формальная система *F* определяется в виде четверки:

$$F=\langle T, P, A, \Pi\rangle \quad (1.1)$$

T – алфавит (конечное множество символов);

P – множество правил, применение которых к элементам из T позволяет строить правильно построенные формулы;

A – множество аксиом;

П – конечное множество правил вывода.

Если среди аксиом имеются нелогические аксиомы (описывающие предметную область), то формальная система называется формальной теорией.

Выводом (или доказательством) f_m из множества формул $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ в формальной системе называется конечная последовательность правильно построенных формул f_{k+1}, f_{k+2}, …, f_{k+m}, таких что каждая из формул последовательности либо является аксиомой, либо получена из предыдущих формул последовательности с использованием аксиом или правил вывода. Формула f_m в этом случае называется выводимой формулой (или теоремой) формальной системы *F*.

Запишем пример:

$$T=\{a,b,c\} \quad (1.2)$$

P – любая последовательность символов алфавита T.

$$A=\{aca\}.$$

$$\Pi=\{\frac{X_1cX_2}{bX_1cX_2b}\},$$

где X_1 и X_2 – любые последовательности символов из T

Вывод формулы bbacabb будет следующим:

1. aca
2. bacab
3. bbacabb

bbacabb является теоремой, так как она выведена из аксиомы.

Такая формула как, допустим, babbacab не является теоремой, так как ее нельзя вывести из аксиомы (однако она выводима из формулы abbaca).

Алгебраическая система — это упорядоченная тройка:

$$S = \langle M,G,R\rangle, \quad (1.3)$$

где *M* – основное множество*;*

G – множество n-местных функций из M^n *в* M*;*

R – семейство *n*-арных отношений на *M*.

n-арное отношение R_i на *M* – это некоторое подмножество $R_i \subseteq M^n$.

Модель – $S=\langle M, \varnothing, R\rangle$

Алгебра – $S=<M, G, \varnothing>$

Понятие алгебраической системы играет важную роль в случае использования формальных систем для представления знаний и манипулирования ими в конкретной предметной области. Само использование формальных систем связано с понятием интерпретации.

Интерпретацией формальной системы является модель языка $\Omega=<M,I>$, где M – непустое множество (область интерпретации), I – однозначное отображение, которое отображает формальную систему в алгебраическую, а именно:

1. Каждому константному символу ставит элемент M.
2. Каждому предикатному символу – отношение R.
3. Каждому функциональному символу – функцию G.

Формула является выполнимой в данной интерпретации, если существует такая подстановка констант, при которой она превращается в истинное высказывание.

Формула является истинной в данной интерпретации, если она истинна при любой подстановке констант.

Рассмотрим пример.

Пусть формальная система определена трехместным предикатом P(x,y,z). Интерпретация ставит в соответствие этому символу трехместное отношение R=«СЕМЬЯ», заданное в виде таблицы (

Таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Пример алгебраической системы

Мать	**Отец**	**Ребенок**
Аня	Петя	Вася
Галя	Женя	Коля

Тогда, универсум у нас M={Петя, Аня, Вася, Галя, Женя, Коля}. Формула P(x,y,z) выводима только на тройках (Аня, Петя, Вася) и (Галя, Женя, Коля).

Отсюда следует, что $\forall x \forall y \forall z$ P(x,y,z) ложно, а $\exists x \exists y \exists z$ P(x,y,z) – истинно в построенной модели.

Иногда алгебраическую систему проще изобразить в виде сетевой модели. Сетевые модели подразделяются на множество различных видов, среди которых наиболее популярными являются семантические сети. Основным достоинством, отличающим семантические сети, является возможность отражения синтаксиса и семантики в одном представлении благодаря использованию не только обозначений элементов, но и самих элементов, а также связей, сопоставляющих элементам их интерпретации.

Семантическая сеть – это ориентированный граф, составленный из множества вершин, характеризующих понятия, и дуг, раскрывающих взаимосвязи между понятиями.

Простейшая форма семантической сети может быть представлена в виде реализации высказывания «Евгений дал Марии книгу» и «Евгений и Мария являются людьми» (рис. 1.1).

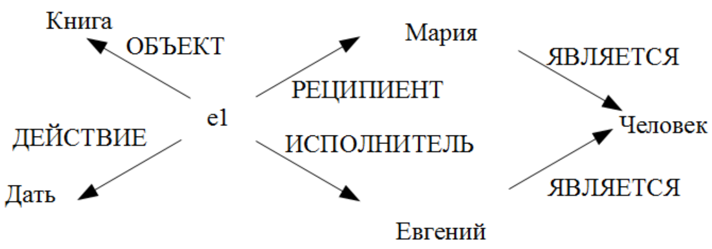

Рис. 1.1 Пример семантической сети

Выражение «e1» в данной сети представляет собой событие «передача книги», где исполнителем является Евгений, принимающим лицом (реципиентом) является Мария, а объектом – книга.

Если попытаться выразить вышеприведенную сеть в виде предикатов, она примет следующую форму:

ОБЪЕКТ (e1, книга)
ДЕЙСТВИЕ (e1, передача)
ИСПОЛНИТЕЛЬ (e1, Евгений)
РЕЦИПИЕНТ (e1, Мария)
ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ (Евгений, Человек)
ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ (Мария, Человек)

Таким образом, в этом случае названия дуг можно охарактеризовать предикатными символами, а актанты (то есть участники ситуации, аргументы) – это вершины. В общем, в семантических сетях выделяют три вида основных вершин:

1. Вершины-ситуации (состояния, процессы и пр.), выражаемые предикатами;
2. Вершины-понятия (абстрактные и физические);
3. Вершины-характеристики.

В качестве дуг могут выступать:

1. Теоретико-множественные отношения (элемент-множество, часть-целое, множество-подмножество и т.п.);
2. Логические отношения (И, ИЛИ, НЕ);
3. Квантифицированные отношения ($\forall$,$\exists$);
4. Лингвистические отношения (ДЕЙСТВИЕ, ИСПОЛНИТЕЛЬ, ЯВЛЯЕТСЯ и т.д.).

Задание на выполнение практической работы

Представьте алгебраическую систему, заданную *n* местным отношением (табл. 1.2). Определите истинность и выполнимость формул в данной системе. Изобразите формулы данной системы в виде семантической сети.

Таблица 1.2 – Задание на выполнение практической работы № 1

Вариант	**Предметная область**	***n***
1	Учебная группа	3
2	Пищевая цепочка	3
3	Карьерная лестница	3
4	Структура ВУЗа	3
5	Система образования	3
6	Товарооборот	3
7	Пищевая цепочка	4
8	Карьерная лестница	4
9	Структура ВУЗа	4
10	Система образования	4
11	Товарооборот	4
12	Учебная группа	5
13	Карьерная лестница	5
14	Структура ВУЗа	5
15	Система образования	5
16	Товарооборот	5

Контрольные вопросы

1 Что такое формальная система?
2 Что подразумевает интерпретация формальной системы?
3 Понятие выполнимости и истинности формулы.
4 Для чего используются семантические модели знаний?

Практическая работа № 2
Продукционная модель представления знаний

Цель

Приобрести навыки реализации продукционной модели представления знаний.

Теоретические сведения

При изучении какого-либо объекта выделяют одно или несколько его свойств, совокупность которых составляет сущность этого объекта в данном рассмотрении. Для описания объекта или его отдельных свойств выбираются некоторые характеристики – величины, которые могут принимать либо количественные, либо качественные значения. В первом случае характеристики называются параметрами, а во втором – признаками описываемого объекта.

Каждая характеристика любого объекта может принимать значения из некоторого списка (множества) разрешенных значений.

В свою очередь, совокупность всех характеристик некоторого объекта (или предметной области в целом) образует так называемый список разрешенных характеристик данного объекта (предметной области). Списки разрешенных характеристик и разрешенных значений этих характеристик охватывают множество всех имеющихся фактов, подлежащих хранению в базе знаний экспертной системы. Каждый из списков не является жестко фиксированным, а может изменяться в ходе перепроектирования базы знаний, например, вследствие пополнения её новыми знаниями.

Примеры описания правил с помощью продукций приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Продукционные правила

Антецедент	Консеквент
ЕСЛИ t = высокая	ТО грипп = да
ЕСЛИ цена = минимальная	ТО закупка = да
ЕСЛИ класс = млекопитающее И потребление мяса = да	ТО отряд = хищник

В экспертных системах правила, по которым решаются проблемы в конкретной предметной области, хранятся в базе знаний (рис. 2.1). В общем смысле базу знаний составляют множества фактов и правил. Под фактами подразумеваются знания типа «А это А», они характерны для баз данных. Правила (продукции) представляют знания вида «ЕСЛИ-ТО». Правила позволяют вывести новые факты.

Знания в ЭС – это формализованная информация, которая используется в процессе логического вывода. Знания в ЭС бывают статическими, которые введены в систему на этапе проектирования, и динамические, которые можно охарактеризовать как опыт, или знания, полученные в процессе функционирования.

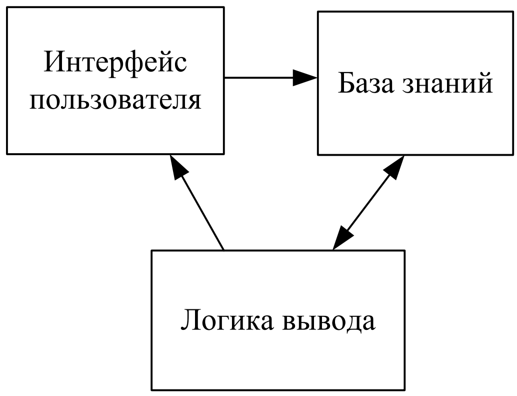

Рис. 2.1. Структура экспертной системы

Работа экспертной системы представляет собой циклическую последовательность шагов, на каждом из которых из базы выбирается некоторое правило, которое применяется к текущему содержимому рабочей памяти. Цикл заканчивается тогда, когда выведено либо опровергнуто целевое утверждение. Данный цикл иначе называется логическим выводом. Логический вывод может происходить многими способами, из которых наиболее распространены прямой и обратный порядок вывода.

Прямой порядок вывода – от фактов, которые находятся в рабочей памяти, к заключению. Если такое заключение удается найти, то оно добавляется в рабочую память. Прямой вывод часто называют выводом, управляемым данными.

При обратном порядке вывода заключения просматриваются до тех пор, пока не будет обнаружены в рабочей памяти или получены от пользователя факты, подтверждающие одно из них. В системах с обратным выводом вначале выдвигается некоторая гипотеза, а затем механизм вывода в процессе работы как бы возвращается назад, переходя от выдвинутой гипотезы к фактам и пытаясь найти среди них те, которые подтверждают эту гипотезу. Если она оказалась правильной, то выбирается следующая гипотеза, детализирующая первую и являющаяся по отношению к ней подцелью. Далее отыскиваются факты, подтверждающие истинность подчинённой гипотезы. Вывод такого типа называется управляемым целями. Обратный поиск применяется в тех случаях, когда цели известны и их сравнительно немного.

Рассмотрим пример прямого вывода для решения задачи построения одной башни из n одинаковых кубиков, лежащих на земле. Пусть у нас имеются два правила:

$П_1$:

Если первый кубик лежит на земле и не находится под кубиком, то поднять его и поставить на второй кубик, не находящийся под кубиком.

$П_2$:

Если первый кубик лежит на земле и не находится под кубиком и если второй кубик не находится под кубиком и лежит на третьем кубике, то поднять первый кубик и поставить на второй кубик.

Для формализации задачи обозначим множество кубиков как $M = \{m_1, m_2,\dots, m_n\}$ введем три предикатных символа:

On – двуместный предикатный символ «находиться на»;
Em – одноместный предикатный символ «не находиться под кубиком»;
Er – одноместный предикатный символ «находиться на земле».
Тогда правила могут быть представлены по формуле (1) как:
$П_1 = <C_1, A_1, D_1>$, где
$C_1 = \{Er(x), Em(x), Em(y)\}$,
$A_1 = \{On(x,y)\}$,
$D_1 = \{Er(x), Em(y)\}$.

$П_2 = <C_2, A_2, D_2>$, где
$C_2 = \{Er(x), Em(x), Em(y), On(y,z)\}$,
$A_2 = \{On(x,y)\}$,
$D_2 = \{Er(x), Em(y)\}$.

Наглядно представим начальное (табл. 2.2) и целевое (табл. 2.3) состояние рабочей памяти в виде таблиц интерпретирующего отображения предикатных символов (так как кубики равнозначны, порядок нумерации элементов множества M не имеет значения).

Таблица 2.2 – Начальное состояние мира кубиков

R(On)	$\emptyset$
R(Em)	$\{m_1\}, \{m_2\}, \ldots, \{m_n\}$
R(Er)	$\{m_1\}, \{m_2\}, \ldots, \{m_n\}$

Таблица 2.3 – Целевое состояние мира кубиков

R(On)	$\{m_2, m_1\}, \{m_3, m_2\}, \ldots, \{m_n, m_{n-1}\}$
R(Em)	$\{m_n\}$
R(Er)	$\{m_1\}$

Применим стратегию управления прямого вывода:
Шаг 1. Выбираем $П_1$.
Шаг 2. Для проверки выполнимости условия C_1 подставим m_2 и m_1 вместо x и y в атомарных формулах. Условие C_1 выполнимо для текущего состояния, так как предикаты $Er(m_2)$, $Em(m_2)$, $Em(m_1)$ истинны.
Шаг 3. Помещаем $П_1$ в конфликтное множество.
Шаг 4. $П_2$ не является применимым, так как $R(On)= \emptyset$. Применяя $П_1$, переведем рабочую память в состояние, отображения которого представлены в табл. 2.4
Шаг 5. Переходим к шагу 1.
И т.д.

Таблица 2.4 – Второе состояние мира кубиков

R(On)	$\{m_2, m_1\}$
R(Em)	$\{m_2\}, \{m_3\}, \ldots, \{m_n\}$
R(Er)	$\{m_1\}, \{m_3\} \ldots, \{m_n\}$

Отметим, что на втором цикле конфликтное множество будет состоять из двух правил, поэтому требуется уточнить словосочетание «какое-либо правило» на четвертом шаге. Тут целесообразным будет использовать критерий большей информативности. Иначе говоря, выбор должен пасть на то правило, которое содержит больше атомарных формул в условии С, т.е. $П_2$. Выбор такой эвристики приведет к выбору второго правила и на всех последующих шагах вплоть до достижения целевого состояния.

Задание на выполнение практической работы

Реализовать продукционную систему для заданной предметной области (табл. 2.5), содержащую базу правил и базу правил. Привести механизм вывода.

Таблица 2.5 – Задание на выполнение практической работы № 2

Вариант	Предметная область	Механизм вывода
1	Цветковые растения	Прямой
2	Аквариумные рыбки	Прямой
3	Выбор профессии	Прямой
4	Компьютерные вирусы	Прямой
5	Отбор кандидатов на вакантное место	Прямой
6	Выбор вида спорта с учетом состояния здоровья	Прямой
7	Конфигурация локальной сети	Прямой
8	Выбор материала для изготовления одежды	Прямой
9	Цветковые растения	Обратный
10	Аквариумные рыбки	Обратный
11	Выбор профессии	Обратный
12	Компьютерные вирусы	Обратный
13	Отбор кандидатов на вакантное место	Обратный
14	Выбор вида спорта с учетом состояния здоровья	Обратный
15	Конфигурация локальной сети	Обратный
16	Выбор материала для изготовления одежды	Обратный

Контрольные вопросы

1 Что такое продукционная модель знаний?
2 Для чего используются экспертные системы?
3 Составные части экспертной системы.
4 Прямая и обратная стратегии вывода в продукционных системах.

Практическая работа № 3
Исследование приближенных множеств

Цель

Изучить основы обработки и представления приближенных множеств

Теоретические сведения

Приближенные множества являются своеобразной попыткой описания НЕ-фактора неоднозначности с точки рассмотрения сходных (неразличимых) объектов.

С точки зрения теории приближенных множеств информация об объектах предметной области представляется в виде информационной системы:

$$SI=<U, Q, V, f>, \quad (3.1)$$

где U – множество объектов,

$Q=\{q_i\}$ – множество атрибутов (свойств),

$V=\cup_{q\in Q}V_q$ – множество всевозможных значений этих атрибутов (V_q – множество всевозможных значений атрибута q),

f – информационная функция, которая сопоставляет каждому объекту множество значений его атрибутов ($f: U \times Q \to V$). Для получения атрибута q для объекта x используют запись вида $v^x_q=f(x,q)$.

При использовании приближенных множеств в качестве инструмента принятия решений множество атрибутов разделяют на два подмножества, называемых множеством атрибутов-условий (или свойств) C и множеством атрибутов-решений (или классов) D (т.е. $Q = C \times D$). В этом случае информационная система (3.1) будет называться таблицей решений и может быть представлена в виде множества решающих правил $\Pi=\{\pi_i\}$, где π_i является правилом вида «ЕСЛИ $c_1=v_{c1}^i$ И $c_2=v_{c2}^i$ И…И $c_n=v_{cn}^i$ ТО $d_1=v_{d1}^i$ И $d_2=v_{d2}^i$ И…И $d_m=v_{dm}^i$», определяющим i-ый объект системы.

Для примера рассмотрим магазин по торговле автомобилями, в котором в настоящий момент находится 10 машин. Пространство решений U состоит из 10 объектов, что можно записать в виде:

$$U=\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}.$$

Владелец магазина отмечает четыре атрибута в своих документах, о которых чаще всего спрашивают клиенты. Это количество дверей q_1, мощность двигателя q_2, цвет q_3 и марка q_4:

$$Q=\{q_1, q_2, q_3, q_4\}.$$

Множество значений каждого атрибута представляется в виде:

$V_{q1}=\{2, 3, 4\}$,

$V_{q2}=\{60, 100, 200\}$,

$V_{q3}=\{$Черный, Белый, Красный$\}$,

$V_{q4}=\{$Лада, Киа, Тойота$\}$.

На основании своих знаний владелец записывает значения атрибутов у себя в журнале в виде таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Пример таблицы решений

Объект, U	Количество дверей, q_1	Мощность двигателя, q_2	Цвет, q_3	Марка, q_4
x_1	2	60	Белый	Лада
x_2	2	100	Черный	Киа
x_3	2	200	Черный	Тойота
x_4	2	200	Красный	Тойота
x_5	2	200	Красный	Лада
x_6	3	100	Красный	Лада
x_7	3	100	Красный	Лада
x_8	3	200	Черный	Тойота
x_9	4	100	Белый	Киа
x_{10}	4	100	Белый	Киа

Предположим, что на основании знаний владельца нам необходимо составить экспертную систему, которая по первым трем атрибутам позволяет определить марку автомобиля. В этом случае множество атрибутов будет разделено следующим образом:

$C=\{q_1,q_2,q_3\}$, $D=\{q_4\}$.

Можно считать, что $c_i=q_i$ ($i\in[1,3]$), а $d_1=q_4$.

На основании определения таблицы решений содержимое Табл. 3.1 представимо в форме продукционных правил:

$П_1$: ЕСЛИ $c_1=2$ И $c_2=60$ И c_3=Белый ТО d_1=Лада

…

$П_{10}$: ЕСЛИ $c_1=5$ И $c_2=100$ И c_3=Белый ТО d_1=Киа

При описании объектов, имеющих схожее описание (несколько равных атрибутов), в теории приближенных множеств используют понятие *P*-неразличимости:

Если некоторые объекты x_i, $x_j \in U$ характеризуются одинаковыми значениями свойств $q \in P$ ($P\subseteq Q$), т.е. $\forall q\in P$, $f(x_i,q)=f(x_j,q)$, то эти объекты называются P-неразличимыми (связаны отношением P-неразличимости). Отношение *P*-неразличимости определяется в пространстве $U \times U$ и записывается как P. В математической форме определение отношения P-неразличимости записывается как:

$$x_i P x_j \Leftrightarrow \forall q \in P, \quad f(x_i,q) = f(x_j,q),$$

где x_i, $x_j \in U$;

$P\subseteq Q$.

Множество объектов, связанных отношением P называется классом абстракции отношения P-неразличимости. Для каждого x_i существует ровно одно такое множество, обозначаемое как $[x_i]_P$, т.е.

$$[x_i]_P = \{x \in U : x_i P x\}.$$

Семейство всех классов абстракции отношения P обозначается как P^*.

Для примера с машинами классы абстракции для отношения С-неразличимости будут выглядеть как:

$[x_1]_C = \{x_1\}$,

$[x_2]_C = \{x_2\}$,

$[x_3]_C = \{x_3\}$,

$[x_4]_C = [x_5]_C = \{x_4, x_5\}$,

$[x_6]_C = [x_7]_C = \{x_6, x_7\}$,

$[x_8]_C = \{x_8\}$,

$[x_9]_C = [x_{10}]_C = \{x_9, x_{10}\}$.

Можно утверждать, что пары x_4, x_5, а также x_6, x_7 и x_9, x_{10} являются С-неразличимыми. Семейством C^* классов абстракции будет множество:

$C^* = \{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4,x_5\},\{x_6,x_7\},\{x_8\},\{x_9,x_{10}\}\}$.

В пространстве U могут существовать несколько подмножеств X, характеризующих отдельные классы объектов (в роли идентификаторов классов могут выступать атрибуты-решения). При этом из-за ограниченности доступных атрибутов принадлежность некоторых объектов может быть неоднозначной. Такая неоднозначность относится к одному из НЕ-факторов и формализуется путем введения понятий верхней и нижней аппроксимаций. Другими словами, неоднозначность принадлежности объектов некоторого пространства U может быть задана в виде приближенного множества.

Итак, P-нижней аппроксимацией множества $X \subseteq U$ называется множество $\underline{P}X$, о принадлежности элементов которого к X можно говорить с полной уверенностью. $\underline{P}X$ описывается как

$\underline{P}X = \{x \in U : [x]_P \subseteq X\}$.

Нижнюю аппроксимацию также называют положительной областью множества X (иногда обозначая ее $Pos_P(X)$)

Рассмотрим определение нижней аппроксимации на примере с автомобилями. Обозначим подмножества пространства U по атрибуту-решению q_4, в результате чего получим три подмножества:

$X_L = \{x_1, x_5, x_6, x_7\}$;

$X_K = \{x_2, x_9, x_{10}\}$;

$X_T = \{x_3, x_4, x_8\}$.

C-нижними аппроксимациями этих подмножеств будут следующие множества:

$\underline{C}X_L = \{x_1, x_6, x_7\}$;

$\underline{C}X_K = \{x_2, x_9, x_{10}\}$;

$\underline{C}X_T = \{x_3, x_8\}$.

Несложно заметить, что, хотя объект x_4 и принадлежит подмножеству X_L, класс его абстракции содержит объект x_5, который не принадлежит этому подмножеству. Аналогичное утверждение можно сделать относительно x_5 и X_T.

P-верхней аппроксимацией множества X⊆U называется множество $\overline{P}X$, о принадлежности элементов которого к X нельзя говорить с полной уверенностью (. $\overline{P}X$ описывается как

$$\overline{P}X = \left\{ x \in U : [x]_P \cap X \neq \varnothing \right\}.$$

Обратимся снова к примеру с автомобилями. C-верхними аппроксимациями подмножеств пространства U будут следующие множества:

$$\overline{C}X_L = \left\{ x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 \right\};$$

$$\overline{C}X_K = \left\{ x_2, x_9, x_{10} \right\};$$

$$\overline{C}X_T = \left\{ x_3, x_4, x_5, x_8 \right\}.$$

Говорят, что множество является P-точным, если его верхняя и нижняя аппроксимации совпадают и P-приближенным – в противном случае.

Для оценки «степени приближенности» рассматриваемого пространства объектов вводят 3 меры:

1. Мера точности аппроксимации (P-точность) множества:

$$\mu_P(X) = \frac{\operatorname{card}\left(\underline{P}X\right)}{\operatorname{card}\left(\overline{P}X\right)},$$

где $\operatorname{card}(\cdot)$ обозначает меру множества (в частности, его мощность).

2. Мера точности аппроксимации (P-точность) семейства множеств:

$$\beta_P(X) = \frac{\operatorname{card}\left(\cup \underline{P}X_i\right)}{\operatorname{card}\left(\cup \overline{P}X_i\right)} = \frac{\sum_i \operatorname{card}\left(\underline{P}X_i\right)}{\sum_i \operatorname{card}\left(\overline{P}X_i\right)},$$

где X_i – множество из некоторого семейства множеств X ($X=\{X_i\}$) пространства U (X⊆U).

3. Мера качества аппроксимации (P-качество) семейства множеств:

$$\gamma_P(X) = \frac{\operatorname{card}\left(\cup \underline{P}X_i\right)}{\operatorname{card}(U)}.$$

Вычислим меры приближенности для примера с автомобилями:

$$\mu_C(X_L) = \frac{3}{5} = 0,6,$$

$$\mu_P(X_K) = \frac{3}{3} = 1,$$

$$\mu_P(X_T) = \frac{2}{4} = 0,5,$$

$$\beta_C(X) = \frac{3+3+2}{5+3+4} = \frac{2}{3},$$

$$\gamma_C(X)=\frac{3+3+2}{10}=0{,}8\,.$$

Если найти степень зависимости решающих атрибутов *D* от условных атрибутов *C*, можно сделать вывод об адекватности построения таблицы решений. Говорят, если $\gamma_C(D)=1$, то таблица является хорошо определенной (а ее правила детерминированными), т.е. из равенства условных атрибутов следует равенство ее решающих атрибутов. В противном случае таблица является плохо определенной, а пара правил, для которых левые части равны, а правые различны, называются недетерминированными.

Плохо определенную таблицу решений можно «подкорректировать» двумя способами:

1. Исключить недетерминированные правила.
2. Расширить множество условных атрибутов.

Создание хорошо определенной таблицы решений относится к решению задачи ограничения набора атрибутов снизу. Для решения второй задачи необходимо ввести понятие излишнего атрибута-условия.

Атрибут $c \in C$ является излишним, если для $C_1 = C\backslash\{c\}$ выполняется равенство $C_1^* = C^*$. В противном случае атрибут называется неустранимым.

Множество неустранимых атрибутов из *C* называется ядром *C*:

$$CORE(C)=\left\{c\in C: C'^* \neq C^*, C' = C\setminus\{c\}\right\}$$

Вычислим неустранимые элементы и ядро. Проверим выполнимость равенства $C_1^*=C^*$ для каждого условного атрибута c_i (i=[1;6]):

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_1\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3,x_8\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}\neq C^*;$$

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_2\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}= C^*;$$

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_3\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3,x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}\neq C^*;$$

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_4\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}= C^*;$$

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_5\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}= C^*;$$

$$\left(C\setminus\{\mathrm{c}_6\}\right)^*=\left\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\},\{x_9\},\{x_{10}\}\right\}= C^*;$$

Следовательно,

$$CORE(C)=\left\{c_1,c_3\right\}.$$

Для выявления степени «неустранимости» атрибута-условия *c* (или множества атрибутов-условий C_1) относительно атрибутов-решений используют нормализованный коэффициент существенности:

$$\sigma_{(C,D)}(C_1)=\frac{\gamma_C(D^*)-\gamma_{C_2}(D^*)}{\gamma_C(D^*)},$$

где C_2=$C\backslash C_1$.

Для примера с автомобилями при C_1={c_1} получаем $\sigma_{(C,D)}(\{c_1\})=1$. Следовательно, c_1 для рассматриваемой системы является несущественным и его исключение не приведет к ухудшению качества аппроксимации.

Нормализованный коэффициент существенности используют также как меру погрешности приближения при необходимости сокращения множества условных атрибутов на множество *C'*. При $\sigma_{(C,D)}(C')=0$ можно исключить *C'* из множества атрибутов-условий без ущерба аппроксимации семейства множеств D^*.

Задание на выполнение практической работы

Обработать одну из таблиц, представленных на основе теории приближенных множеств согласно варианту (табл. 3.5).

Таблица 3.2 – Таблица решений № 1

Вагон, *U*	Назначение, q_1	Длина базы, q_2	Количество осей, q_3	Весовая категория, q_4	Тип, q_5
x_1	Пассажирский	12	4	5	Мягкий
x_2	Пассажирский	17	4	4	Купе
x_3	Пассажирский	14	4	4	Мягкий
x_4	Пассажирский	14	4	4	Купе
x_5	Грузовой	10	4	3	Полувагон
x_6	Грузовой	8	6	5	Цистерна
x_7	Грузовой	12	8	6	Полувагон
x_8	Грузовой	10	4	3	Полувагон
x_9	Грузовой	12	4	4	Полувагон
x_{10}	Грузовой	8	4	4	Цистерна

Таблица 3.3 – Таблица решений № 2

Объект, *U*	Марка, q_1	Ценовая категория, q_2	Наличие, q_3	Цвет, q_4	Тип, q_5
x_1	Samsung	3	Да	Черный	Телевизор
x_2	LG	2	Да	Белый	Телевизор
x_3	Samsung	2	Нет	Красный	Телефон
x_4	LG	2	Да	Белый	Телефон
x_5	Sony	4	Нет	Красный	Телевизор
x_6	Sony	4	Нет	Красный	Телевизор
x_7	LG	3	Да	Черный	Фотоаппарат
x_8	Samsung	3	Нет	Черный	Фотоаппарат
x_9	Sony	2	Да	Белый	Фотоаппарат
x_{10}	LG	4	Нет	Черный	Телефон

Таблица 3.4 – Таблица решений № 3

Объект, U	Рост, q_1	Вес, q_2	Возраст, q_3	Род войск, q_4
x_1	160	60	18	ВДВ
x_2	170	70	20	ЖДВ
x_3	180	60	20	ВВС
x_4	160	70	22	ВВС
x_5	170	70	20	ВДВ
x_6	180	70	20	ВДВ
x_7	160	60	18	ЖДВ
x_8	170	80	22	ЖДВ
x_9	180	80	18	ВВС
x_{10}	170	60	20	ЖДВ

Таблица 3.5 – Задание на выполнение практической работы № 3

Вариант	Таблица	Задание	Решающий атрибут
1	1	Определить адекватность	q_5
2	2	Определить адекватность	q_5
3	3	Определить адекватность	q_4
4	1	Определить неустранимые атрибуты	q_5
5	2	Определить неустранимые атрибуты	q_5
6	3	Определить неустранимые атрибуты	q_4
7	1	Определить адекватность	q_4
8	2	Определить адекватность	q_4
9	3	Определить адекватность	q_3
10	1	Определить неустранимые атрибуты	q_4
11	2	Определить неустранимые атрибуты	q_4
12	3	Определить неустранимые атрибуты	q_3
13	1	Определить адекватность	q_3
14	2	Определить адекватность	q_3
15	3	Определить адекватность	q_2
16	1	Определить неустранимые атрибуты	q_3

Контрольные вопросы

1 Каков основной смысл приближенных множеств?
2 Понятие границ аппроксимации приближенного множества?
3 Что обозначает понятие «плохо определенная таблица решений»? Меры приближенности.
4 Физический смысл коэффициента существенности.

Практическая работа № 4
Основные положения теории искусственных нейронных сетей

Цель

Изучить способы линейного разделения данных с помощью простейших перцептронов

Теоретические сведения

Искусственные нейронные сети (ИНС) – одно из направлений компьютерной индустрии, основанное на принципах функционирования искусственных устройств по образу и подобию человеческого мозга.

Мозг состоит из серого и белого вещества. Серое вещество представляет собой совокупность тел нейронов (или сом), а белое – нервные волокна, которые соединяют. Помимо тела нейрон включает дендриты и аксон.

Нейрон получает информацию через свои дендриты, аккумулирует ее в соме и передает их дальше через аксон, который разветвляется на синапсы – нервные нити, которые соединяют нейроны между собой.

Наш мозг содержит около 10^{11} нейронов, каждый из которых связан с тысячами или десятками тысяч других нейронов. Таким образом, биологическая нейронная сеть содержит до 10^{15} взаимосвязей.

Каждый нейрон может существовать в двух состояниях – возбужденном (активном) и невозбужденном (неактивном). В возбужденное состояние нейрон переходит под действием электрических сигналов, поступающих к нему от других нейронов через синапсы, когда эти сигналы становятся достаточно большими (или больше некоторого порога). В процессе возбуждения нейрона синапсы выделяют вещество (нейромедиатор), которое способствует возбуждению или затормаживает его.

В возбужденном состоянии нейрон сам посылает электрический сигнал, который либо идет к следующему нейрону, либо ведет к активации какого-либо действия (сокращению мышцы, появлению зрительного образа, восприятию звука, и т.д.).

Первой работой, явившейся теоретическим фундаментом сегодняшних интеллектуальных устройств, которые позволяют формализовать структуру и функциональность человеческого мозга, является опубликованная в 1943 году статья Уоррена Мак-Калока и Уолтера Питтса. Ее авторы выдвинули гипотезу математического нейрона – устройства, которое моделирует нейрон мозга человека. Математический нейрон, подобно биологическому, имеет несколько входов и один выход (рис. 4.1).

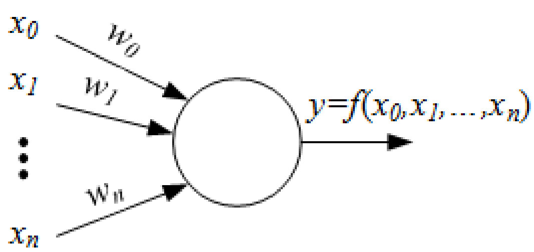

Рис. 4.1. Модель математического нейрона

На входы математического нейрона поступают входные воздействия x_i, которые суммируются, умножаясь на некоторые весовые коэффициенты w_i. Таким образом, в теле нейрона формируется взвешенная сумма:

$$u = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i \quad (4.1)$$

Выходной сигнал нейрона y принимает одно из двух значений – нуль или единицу, которые формируются при вычислении пороговой функции (функции Хевисайда):

$$y = f(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } u \geq 0 \\ 0, \text{ если } u < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Таким образом, математический нейрон, как и его биологический прототип, существует в двух состояниях. Логическую функцию $f(u)$ принято называть функцией активации нейрона. Графически функция активации представлена на рис. 4.2.

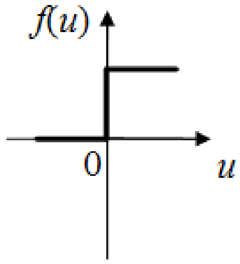

Рис. 4.2. Ступенчатая функция активации нейрона

Весовые коэффициенты w_i (i=1,2,..n, n – количество входных сигналов) имитируют нейромедиаторы (силу синаптических связей), а весовой коэффициент w_0 представляет собой порог (обозначаемый также «-θ»), который указывает на «достаточность» входных сигналов x_j, о которой было упомянуто при описании биологического нейрона. Принято считать, что в математическом нейроне всегда x_0=1.

Одними из первых реализаций математического нейрона были логические функции. Так, математический нейрон, имеющий два входа, позволяет реализовать операцию конъюнкции или дизъюнкции (рис. 4.3)

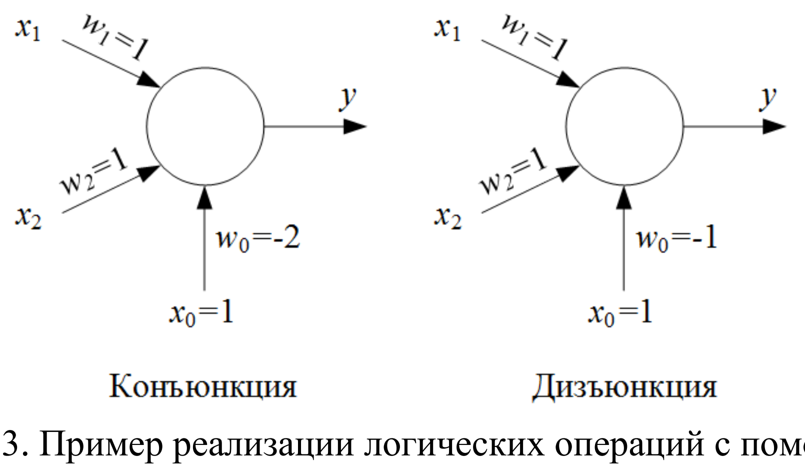

Рис. 4.3. Пример реализации логических операций с помощью математического нейрона

Графически работу математического нейрона можно представить в виде разделяющей прямой $y=w_1x_1+w_2x_2+w_0$ (рис. 4.4).

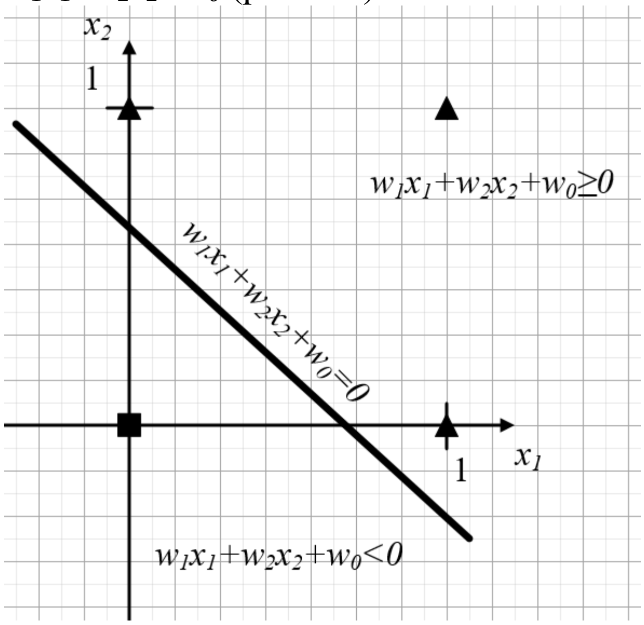

Рис. 4.4. Графический смысл модели нейрона в примере с дизъюнкцией

До 70х годов прошлого века появилось множество реализаций перцептрона на основе фундаментальной работы Маккалока и Питтса, а также работ Розенблатта, Хэбба, Уидроу и Хофа и др. Это был колоссальный прорыв в моделировании человеческого мозга. Казалось, что ключ к сильному искусственному интеллекту был найден и его расшифровка – вопрос времени. Перцептроны использовались для решения задач диагностики, прогнозирования и анализа данных в целом. Между тем, возможно, из-за неправильной интерпретации работ Розенблатта (который уже представлял перцептрон не как один слой нейронов, а как полноценную нейронную сеть в современном понимании – с тремя слоями: входным, скрытым и выходным), либо из-за ограниченных технических возможностей того времени, оказалось, что перцептрон не мог решить некоторые задачи, причем эти задачи внешне не отличались от тех, с которыми перцептрон ранее успешно справлялся. Возникла необходимость более детального исследования перцептрона и создания более глубокой теоретической базы искусственных нейронных сетей.

Успехом в этих исследованиях принято считать труд Марвина Минского, где математически строго доказывается неспособность использования однослойных перцептронов для решения многих простых задач, которые названы впоследствии «линейно неразделимыми». Наиболее наглядным примером, иллюстрирующим этот факт, является реализация логической операции «XOR» (Исключающее ИЛИ, сложение по модулю «2»), которая принимает значение «1», когда только один из входных аргументов является истинным, и «0» в остальных случаях (рис. 4.5).

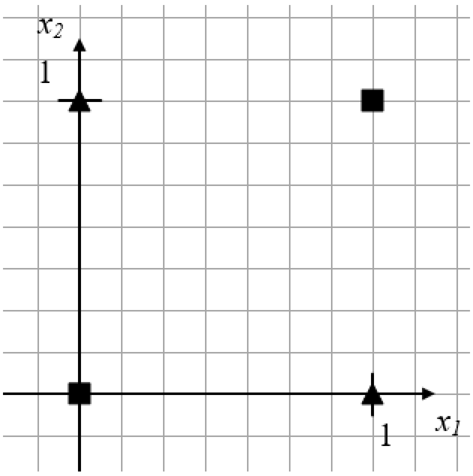

Рис. 4.5. Графическое изображение XOR

Для их решения используют многослойный перцептрон, содержащий кроме выходного слоя нейронов так называемые скрытые слои (исследования многослойного перцептрона продолжаются до сих пор в областях Deep Learning и Convolutional Neural Networks).

Задание на выполнение практической работы

В таблице 4.1 описаны выборки, каждый элемент которых представлен парой (x_1, x_2). При этом элемент выборки принадлежит либо классу 1 (отмечен треугольником) или классу 2 (отмечен кругом). Определите, является ли задача определения класса элемента линейно разделимой для выборки согласно варианту. Если да, то представьте уравнение разделяющей линии, а также изобразите перцептрон Маккалока – Питтса, способный осуществить это разделение. Если нет, объясните, почему, и какой перцептрон способен реализовать такое разделение?

Таблица 4.1 – Задание на выполнение практической работы № 4

Вариант	Выборка класса 1	Выборка класса 2
1	2	3
1	(10;5), (7;7), (4;8), (10;4), (4;10), (8;10), (5;8), (10;3), (8;2)	(8;0), (3;5), (7;0), (1;5), (1;9), (4;5), (7;2), (1;1), (1;7), (0;1)
2	(4;2), (3;3), (10;1), (6;0), (1;4), (2;4), (6;3), (0;2), (0;4), (4;1)	(6;10), (9;7), (10;8), (7;1), (9;3), (7;0), (5;9), (10;9), (7;9), (5;7)
3	(10;4), (8;8), (10;8), (9;3) (5;6), (7;6), (0;8), (10;8), (0;10), (3;9)	(0;4), (2;0), (8;1), (3;5), (5;1), (2;5), (0;7), (5;0), (0;2)
4	(0;2), (3;0), (0;1), (1;1), (1;0), (0;0), (2;0)	(0;7), (3;2), (0;4), (0;8), (9;7), (3;3), (6;10), (4;6), (1;3), (8;1)

Окончание табл. 4.1

1	2	3
5	(3;1), (8;1), (5;4), (9;2), (3;4), (2;3), (7;2), (1;4), (3;5), (0;5)	(8;10), (2;8), (3;9), (7;3), (4;7), (7;8), (10;7), (4;5), (9;5), (0;6)
6	(1;0), (2;0), (3;2), (2;4), (1;1), (0;1), (1;2), (2;1), (3;1), (1;5)	(3;0), (5;6), (5;5), (4;8), (6;10), (6;3), (5;7), (9;0), (4;1), (2;7)
7	(1;6), (2;1), (1;1), (0;7), (3;0), (6;0), (3;4), (0;4), (1;3), (2;5)	(4;10), (6;9), (4;6), (8;4), (3;8), (10;6), (5;10), (3;6), (2;6)
8	(4;4), (0;4), (3;3), (2;0), (3;2), (4;2), (0;7), (7;0), (2;8), (0;9)	(10;2), (9;2), (5;10), (6;2), (5;2), (10;6), (5;3), (10;0), (8;5), (5;8)
9	(10;9), (5;10), (8;6), (9;6), (6;8), (2;7), (7;6), (4;7), (8;9), (3;6)	0;7), (3;5), (2;9), (1;4), (5;2), (0;9), (7;1), (1;1), (4;5), (6;1)
10	(2;7), (4;9), (1;7), (1;9), (5;9), (6;10), (1;6), (3;10), (1;8), (7;10)	(5;8), (0;4), (4;7), (6;4), (7;6), (7;3), (3;2), (10;4), (6;6), (7;0)
11	(9;3), (6;1), (8;6), (9;8), (6;4), (4;5), (4;9), (10;4), (10;8), (9;0)	(1;10), (3;2), (4;3), (2;8), (3;4), (0;5), (0;1)
12	(4;9), (7;10), (0;9), (9;3), (5;3), (8;6), (10;7), (8;9), (10;0), (2;9)	(0;1), (2;3), (8;0), (0;6), (2;4), (0;4), (1;1), (1;4), (2;1), (3;4)
13	(5;1), (2;5), (3;1), (0;4), (2;1), (3;0), (4;0), (1;9), (1;1), (3;7)	(4;2), (4;7), (9;10), (4;6), (5;2), (3;8), (7;10), (9;5), (3;3)
14	(3;0), (1;2), (0;7), (10;0), (2;6), (4;1), (1;3), (1;1), (8;3), (8;0)	(10;8), (2;10), (5;7), (3;8), (8;7), (3;10), (9;5), (8;4), (7;5), (8;6)
15	(5;0), (1;2), (0;9), (2;5), (1;7), (2;4), (1;3), (5;5), (2;6), (3;6)	(7;1), (4;6), (6;2), (5;3), (6;6), (7;9), (7;5), (9;0), (6;1), (6;3)
16	(6;1), (3;4), (4;4), (1;3), (2;2), (0;6), (0;7), (5;3), (0;4), (6;0)	(10;9), (8;0), (8;4), (7;6), (10;6), (4;6), (9;5), (8;5), (8;3), (7;1)

Контрольные вопросы

1 Цель теории ИНС.
2 Понятие математического нейрона.
3 Что такое линейно разделимая задача?
4 Для чего необходимо использовать многослойные нейронные сети?

Практическая работа № 5
Композиция нечетких отношений

Цель

Освоить реализацию операции композиции нечетких отношений

Теоретические сведения

Чтобы адекватно использовать полезную информацию субъективных высказываний в решении технических проблем необходимо было разработать математическую модель. Именно с этой целью и была основана теория нечетких множеств.

Объектом исследований теории нечетких множеств является проблема формализации субъективного рассуждения людей в искусственных системах. Люди умеют рассуждать приблизительно, современные компьютеры этой возможностью не обладают. При общении людей не возникает концептуальных проблем при интерпретации фраз типа «высокий человек» и «высокооплачиваемая работа», поскольку эти фразы передают семантически понятную информацию.

В то же время компьютеры не в силах понять эти фразы в исходном виде, для их интерпретации необходимо конкретное значение высоты или заработной платы, которое сравнивается с заданным пороговым значением для вынесения вердикта относительно «высоты». Основным достоинством теории нечетких множеств является использование лингвистические переменные вместо количественных, а нечеткую логику вместо бинарной для формализации субъективных категорий. Теория нечетких множеств осуществляет попытку включения опыта и интуиции отдельного человека при рассмотрении сложных технических систем.

Нечеткое множество представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной уверенностью утверждать – принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет.

Формально нечеткое множество A определяется как множество упорядоченных пар вида:

$$< x, \mu_A(x) >, \tag{5.1}$$

где x – элемент некоторого универсального множества X;

$\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in X$ некоторое действительное число из интервала [0, 1], т.е. определяется в форме отображения:

$$\mu_A(x) : X \to [0,1]. \tag{5.2}$$

При этом $\mu_A(x)=1$ означает, что элемент x определенно принадлежит нечеткому множеству A, а $\mu_A(x)=0$ – x определенно не принадлежит нечеткому множеству A.

Наряду с понятием нечеткого множества фундаментальным понятием является «нечеткое отношение». Оно является важным при представлении субъективных высказываний, содержащих 2 и более аргументов, например, «x приблизительно равно y».

Нечеткое N-арное отношение R, заданное на множествах X_1, X_2, …, X_N определяется как нечеткое множество, которое определено на декартовом произведении этих множеств:

$$\forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2, ..., \forall x_N \in X_N : R = \left\{ \left\langle \left(x_1, x_2, ..., x_N \right), \mu_R \left(x_1, x_2, ..., x_N \right) \right\rangle \right\}, \qquad (5.3)$$

где $\mu_R(\cdot)$ – функция принадлежности, которая каждой последовательности x_1, x_2, …, x_N приписывает вещественное число из интервала [0,1], интерпретируемое как сила связи между элементами последовательности:

$$\mu_R : X_1 \times X_2 \times ... \times X_N \to [0,1].$$

Нечеткое отношение, содержащее 2 элемента, как и в случае классических множеств, принято называть бинарным, 3 элемента – тернарным.

Для примера раскроем высказывание “x приблизительно равно y”. Данное высказывание представляет собой бинарное отношение, определенное на декартовом произведении множеств X и Y. Допустим, X={3,4,5}, а Y={4,5,6}. Отношение R в таком случае можно определить как:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \langle (3,4), 0.8 \rangle, \langle (3,5), 0.6 \rangle, \langle (3,6), 0.4 \rangle, \\ \langle (4,4), 1 \rangle, \langle (4,5), 0.8 \rangle, \langle (4,6), 0.6 \rangle, \\ \langle (5,4), 0.8 \rangle, \langle (5,5), 1 \rangle, \langle (5,6), 0.8 \rangle \end{array} \right\}.$$

Для нечетких отношений используются специфические операции, среди которых важную роль играет операция композиции нечетких отношений. Физически, композицией нечетких отношений является вычисление отношения между x и z, когда известны отношения между x и y и между y и z. Формально, композиция – нечеткое отношение $Q \otimes R$, заданное на декартовом произведении $X \times Z$ (при этом Q задано на $X \times Y$, а R – на $Y \times Z$), имеющее функцию принадлежности:

$$\forall (x,z) \in X \times Z : \mu_{Q \otimes R}(x,z) = \max_{y \in Y} \left\{ \min \left\{ \mu_Q(x,y), \mu_R(y,z) \right\} \right\}.$$

Такое выражение иногда называют максиминной сверткой нечетких множеств и обозначают как $Q \circ R$.

Для пояснения понятия композиции рассмотрим типовой пример, связанный с консалтингом в области выбора профессии для получения соответствующей специальности. Допустим, нам известны два отношения – $R = \left\{ \left\langle (x,y), \mu_R(x,y) \right\rangle \right\}$ и $Q = \left\{ \left\langle (y,z), \mu_Q(y,z) \right\rangle \right\}$. Первое обозначает психофизиологическое профилирование специальностей (Табл. 5.1), второе – психофизиологическое профилирование кандидатов (Табл. 5.2). При этом $x \in X$ – специальность, $y \in Y$ – психофизиологическая характеристика, $z \in Z$ – идентификатор (фамилия) кандидата. На основе имеющейся информации необходимо представить, насколько хорошо каждый кандидат подходит к той или иной специальности.

Таблица 5.1 – Профилирование специальностей

	Быстрота и гибкость, y_1	Умение быстро принимать решения, y_2	Устойчивость и концентрация внимания, y_3	Зрительная память, y_4	Быстрота реакции, y_5
Менеджер, x_1	0.9	0.9	0.8	0.4	0.5
Программист, x_2	0.8	0.5	0.9	0.3	0.1
Водитель, x_3	0.3	0.9	0.6	0.5	0.9
Секретарь, x_4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.2
Переводчик, x_5	0.7	0.8	0.8	0.2	0.6
	Двигательная память, y_6	Физическая выносливость, y_7	Координация движения, y_8	Эмоциональная устойчивость, y_9	Ответственность, y_{10}
Менеджер, x_1	0.3	0.6	0.2	0.9	0.8
Программист, x_2	0.2	0.2	0.2	0.5	0.5
Водитель, x_3	0.8	0.9	0.8	0.6	0.3
Секретарь, x_4	0.2	0.3	0.3	0.9	0.8
Переводчик, x_5	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2

Таблица 5.2 – Профилирование кандидатов

	Петров, z_1	Иванов, z_2	Сидоров, z_3	Васильева, z_4	Григорьева, z_5
1	2	3	4	5	6
Быстрота и гибкость, y_1	0.9	0.8	0.7	0.9	1
Умение быстро принимать решения, y_2	0.6	0.4	0.8	0.5	0.6
Устойчивость и концентрация внимания, y_3	0.5	0.2	0.3	0.8	0.7

Окончание табл. 5.2

1	2	3	4	5	6
Зрительная память, y_4	0.5	0.9	0.5	0.8	0.4
Быстрота реакции, y_5	1	0.6	0.5	0.7	0.4
Двигательная память, y_6	0.4	0.5	1	0,7	0.8
Физическая выносливость, y_7	0.5	0.8	0.9	0.5	0.4
Координация движения, y_8	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5
Эмоциональная устойчивость, y_9	0.8	1	0.2	0.5	0.6
Ответственност ь, y_{10}	0.3	0.5	0.9	0.6	0.8

Матрицы исходных нечетких отношений имеют следующий вид:

$$M_S = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix};$$

$$M_Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.5 & 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, к примеру, результат нечеткой композиции для характеристики Петрова как менеджера будет следующим:

$$\mu_{Q\otimes R}(x_1,z_1)=\max\left\{\begin{matrix}\min\{\mu_Q(x_1,y_1),\mu_R(y_1,z_1)\},\min\{\mu_Q(x_1,y_2),\mu_R(y_2,z_1)\},...,\\ \min\{\mu_Q(x_1,y_{10}),\mu_R(y_{10},z_1)\}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\max\left\{\begin{matrix}\min\{0.9,0.9\},\min\{0.9,0.6\},\min\{0.8,0.5\},\min\{0.4,0.5\},\min\{0.5,1\},\\ \min\{0.3,0.4\},\min\{0.6,0.5\},\min\{0.2,0.5\},\min\{0.9,0.8\},\min\{0.8,0.3\}\end{matrix}\right\}=0.9.$$

Результаты остальных композиций представляются в виде матрицы:

$$M_{S\circ Q}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.9\\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.8\\ 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.8\\ 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.8\\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}.$$

Для наглядности результаты также представлены в табл. 5.3.

Табл. 5.3. Характеристика кандидатов по специальностям

	Петров, z_1	Иванов, z_2	Сидоров, z_3	Васильева, z_4	Григорьева, z_5
Менеджер, x_1	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9
Программист, x_2	0.8	0.8	0.7	0.8	0.8
Водитель, x_3	0.9	0.8	0.9	0.7	0.8
Секретарь, x_4	0.8	0.9	0.8	0.6	0.8
Переводчик, x_5	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7

Задание на выполнение практической работы

В таблицах ниже представлены данные для выполнения практической работы. Необходимо найти результат нечеткой композиции согласно варианту (Табл. 5.8).

Таблица 5.4 – Характеристика спелости фруктов по цвету

R	Неспелый	Недоспелый	Спелый
Зеленый	1	0.5	0.1
Желтый	0.3	1	0.4
Красный	0.1	0.2	1

Таблица 5.5 – Характеристика вкуса фруктов по спелости

Q	Кислый	Безвкусный	Сладкий
Неспелый	1	0.3	0.2
Недоспелый	0.7	1	0.3
Спелый	0.2	0.7	1

Таблица 5.6 – Характеристика мощности компьютера по размеру

R	Маломощный	Среднемощный	Мощный
Малый	0.7	0.4	0.3
Средний	0.3	0.7	0.5
Крупный	0.5	0.4	0.9

Таблица 5.7 – Характеристика «живучести» компьютера по мощности

R	Минимальная	Высокая	Максимальная
Маломощный	0.7	0.5	0.3
Среднемощный	0.4	0.9	0.8
Мощный	0.3	0.8	0.5

Таблица 5.8 – Задание на выполнение практической работы № 5

Вариант	Задание
1	Определить уверенность в том, что зеленый фрукт кислый
2	Определить уверенность в том, что зеленый фрукт безвкусный
3	Определить уверенность в том, что зеленый фрукт сладкий
4	Определить уверенность в том, что желтый фрукт безвкусный
5	Определить уверенность в том, что желтый фрукт кислый
6	Определить уверенность в том, что желтый фрукт сладкий
7	Определить уверенность в том, что красный фрукт безвкусный
8	Определить уверенность в том, что красный фрукт кислый
9	Определить уверенность в том, что малый компьютер максимально живучий
10	Определить уверенность в том, что малый компьютер средне живучий
11	Определить уверенность в том, что малый компьютер минимально живучий
12	Определить уверенность в том, что средний компьютер максимально живучий
13	Определить уверенность в том, что большой компьютер минимально живучий
14	Определить уверенность в том, что средний компьютер минимально живучий
15	Определить уверенность в том, что большой компьютер максимально живучий
16	Определить уверенность в том, что большой компьютер средне живучий

Контрольные вопросы

1 Для чего необходимо использовать нечеткие множества?
2 Понятие нечеткого отношения.
3 Физический смысл композиции нечетких отношений.

Практическая работа № 6
Нечеткие числа и операции над ними

Цель

Изучить операции над нечеткими числами

Теоретические сведения

Как и в традиционном случае, обработка информации в системе, функционирующей на базе нечетких множеств, основана на количественном представлении входных и выходных данных. Такое представление связано с рассмотрением специальных нечетких множеств, называемых нечеткими величинами. Отличие таких нечетких множеств состоит в том, что оно задано только на множестве действительных чисел (элемент нечеткого множества всегда имеет количественное значение).

Формально, нечеткая величина – это такое нечеткое множество *A*, для которого функция принадлежности есть отображение

$$\mu_A(x): \mathbb{R} \to [0,1]. \tag{6.1}$$

Среди нечетких величин наибольший интерес представляет нечеткий интервал и нечеткое число.

Нечетким интервалом называется нечеткая величина *A* с выпуклой функцией принадлежности, т.е. для которой справедливо условие:

$$\forall x \ \ a < x < b : \mu_A(x) \ge \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}. \tag{6.2}$$

Нечетким числом называется нечеткий интервал *A* с унимодальной функцией принадлежности, т.е. функция принадлежности которого содержит только одно максимальное значение.

Для нечетких чисел помимо нечетких отношений могут быть использованы и простейшие бинарные арифметические операции *f*(*x*, *y*), такие как сложение, вычитание, умножение, деление. Функция принадлежности результата арифметической операции представляется как:

$$\mu_C(z) = \sup_{z=f(x,y)} \left\{ \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \right\}, \tag{6.3}$$

где $A = < x, \mu_A(x) >$, и $B = < x, \mu_B(y) >$ – аргументы арифметической операции;

$C = < z, \mu_C(z) >$ – результат арифметической операции.

В качестве примера рассмотрим выполнение операции сложения двух чисел *I*, приближенно равных единице и представленных в виде множества:

$$I = \{ < 0, 0.2 >, < 1, 1.0 >, < 2, 0.2 > \}.$$

Множество *I*+*I* вычисляется на основе формулы:

$$\mu_{I+I}(x+y) = \sup_{x+y} \left\{ \min\{\mu_I(x), \mu_I(y)\} \right\}.$$

Т.е. для *x*+*y*=2 результат будет следующим:

$$\begin{gathered}\mu_{I+I}(2) = \max\left\{ \min\{\mu_I(0), \mu_I(2)\}, \min\{\mu_I(1), \mu_I(1)\}, \min\{\mu_I(2), \mu_I(0)\} \right\} = \\ = \max\left\{ \min\{0.2, 0.2\}, \min\{1, 1\}, \min\{0.2, 0.2\} \right\} = 1\end{gathered},$$

А итоговое множество будет иметь вид:

$$I + I = \{<0,0.2>, <1,0.2>, <2,1>, <3,0.2>, <4,0.2>\}$$

Вышеуказанные понятия нечеткого интервала и нечеткого числа являются довольно общими и в этом виде не применяются. На практике удобно использовать аналитические формы представления нечетких интервалов и чисел.

Все аналитические функции представления нечетких величин аппроксимируют так называемыми функциями (*L*-*R*)-типа.

Для нечеткого числа функция (*L*-*R*)-типа записывается в виде:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) & \text{если } x \le a \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right) & \text{если } x > a \end{cases}, \tag{6.4}$$

где $L(\cdot)$ и $R(\cdot)$ - произвольные функции типа $f : R \to [0,1]$,

α>0 и β>0 – коэффициенты нечеткости,

a – мода нечеткого числа.

Нечеткие интервалы представимы следующей функцией (*L*-*R*)-типа:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) & \text{если } x \le a \\ 1 & \text{если } a<x<b \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right) & \text{если } x \ge b \end{cases}, \tag{6.5}$$

где *a* и *b* – верхняя и нижняя модальные значения (ядро нечеткого множества).

Из определения нечеткого числа и нечеткого интервала удобно обозначать первое как A_{LR}=<*a*, α, β>$_{LR}$, а второй как A_{LR}=<*a*, *b*, α, β>$_{LR}$.

Такое представление делает возможным уточнение арифметических операций.

Операция сложения нечетких чисел *A* и *B* (*L*-*R*)-типа обозначается через *C*=<*a*, α, β>$_{LR}$, где:

$$a = a_1 + a_2, \ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \ \beta = \beta_1 + \beta_2. \tag{6.6}$$

Операция вычитания нечетких чисел *A* и *B* (*L*-*R*)-типа обозначается через *C*=<*a*, α, β>$_{LR}$, где:

$$a = a_1 - a_2, \ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \ \beta = \beta_1 + \beta_2. \tag{6.7}$$

Другими словами, сложение и умножение нечетких чисел заключается в соответствующих операциях между их модами и расширении «размытости» функции принадлежности путем сложения коэффициентов нечеткости.

Представление операции умножения и деления для нечетких чисел зависит от знаков мод множителей.

Умножение нечетких чисел *A* и *B* (*L*-*R*)-типа, для которых a_1>0 и a_2>0 обозначается через *C*=<*a*, α, β>$_{LR}$, где:

$$a = a_1 a_2, \ \alpha = a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2, \ \beta = a_2\beta_1 + a_1\beta_2. \tag{6.8}$$

Умножение нечетких чисел A и B (L-R)-типа, для которых $a_1<0$ и $a_2>0$ обозначается через $C=\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR}$, где:

$$a = a_1 a_2\,,\ \ \alpha = a_2\alpha_1 - a_1\beta_2\,,\ \ \beta = a_2\beta_1 - a_1\alpha_2\,. \tag{6.9}$$

Умножение нечетких чисел A и B (L-R)-типа, для которых $a_1<0$ и $a_2<0$ обозначается через $C=\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR}$, где:

$$a = a_1 a_2\,,\ \ \alpha = | a_2\beta_1 + a_1\beta_2 |\,,\ \ \beta = | a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2 |\,. \tag{6.10}$$

Другими словами, умножение нечетких чисел заключается в умножении их мод и расширения «размытости» путем попарного умножения коэффициентов нечеткости чисел |A| и |B|

Деление нечетких чисел A и B (L-R)-типа, для которых $a_1>0$ и $a_2>0$ обозначается через $C=\langle a, \alpha, \beta\rangle_{LR}$, где:

$$a = a_1 / a_2\,,\ \ \alpha = \left(a_1\beta_2 + a_2\alpha_1\right)/\,a_2^{\,2}\,,\ \ \beta = \left(a_1\alpha_2 + a_2\beta_1\right)/\,a_2^{\,2}\,. \tag{6.11}$$

Деление в случае $a_1<0$ и $a_2>0$, $a_1<0$ и $a_2<0$ определяется аналогично при использовании абсолютных значений |A| и |B|, как в случае умножения.

В качестве примера рассмотрим арифметические операции между нечеткими числами «нечеткая тройка» $A=\langle 3,2,2\rangle$ и «нечеткая двойка» $B=\langle 2,1,1\rangle$ (рис. 6.1, 6.2).

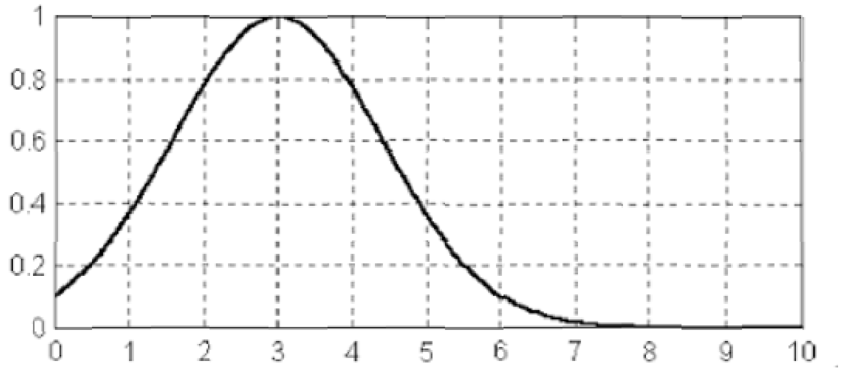

Рис. 6.1. График нечеткого числа «нечеткая тройка»

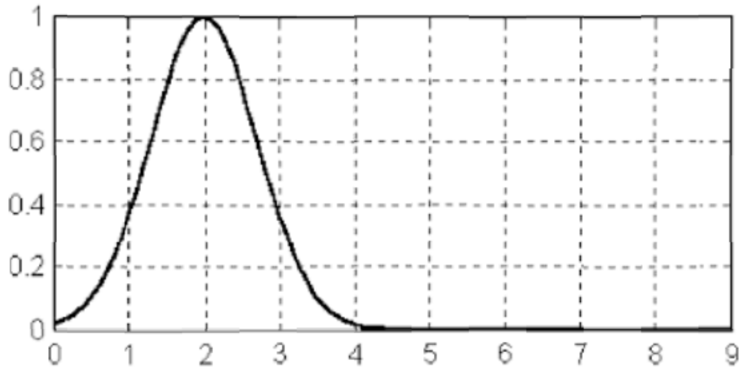

Рис. 6.2. График нечеткого числа «нечеткая двойка»

Результаты выполнения арифметических операций представлены на рис. 6.3–6.6.

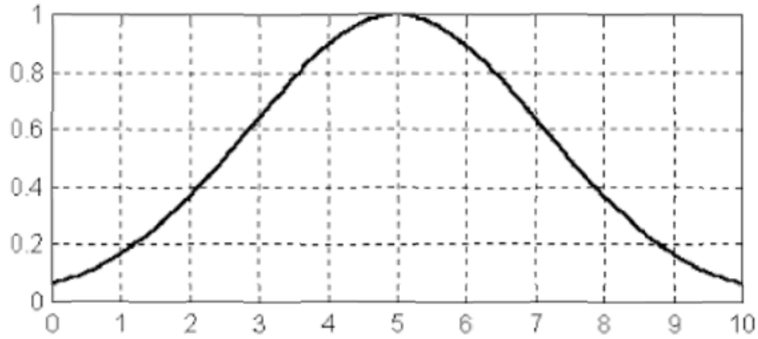

Рис. 6.3. График нечеткого числа «нечеткая пятерка»

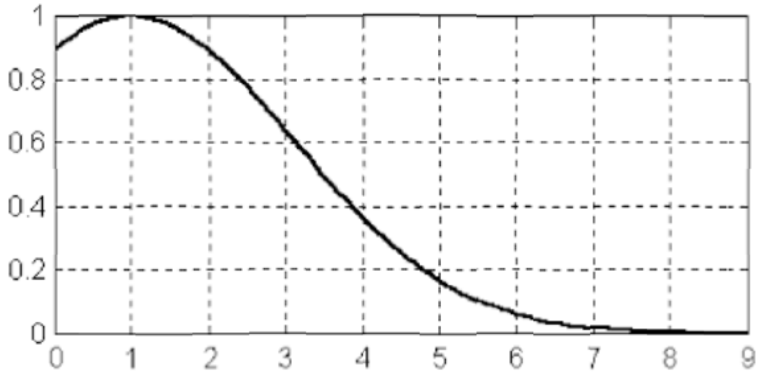

Рис. 6.4. График нечеткого числа «нечеткая единица»

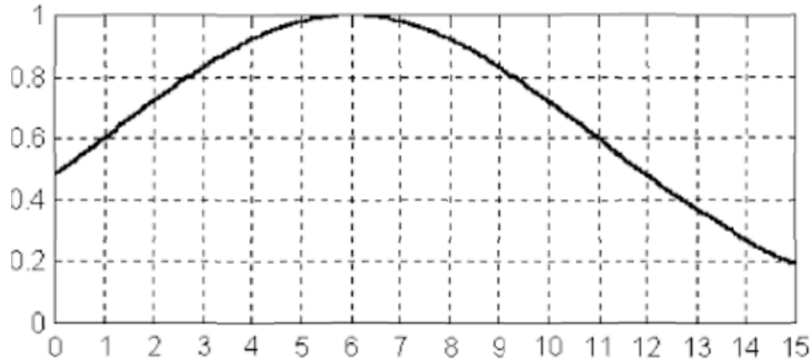

Рис. 6.5. График нечеткого числа «нечеткая шестерка»

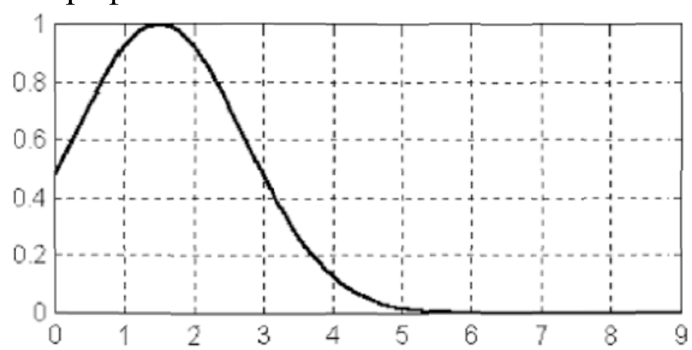

Рис. 6.6. График нечеткого числа «нечеткая дробь 2/3»

Наибольший практический интерес нашли (L-R)-функции, представленные в линейной форме, а именно треугольной для нечеткого числа и трапециевидной для нечеткого интервала.

Треугольное нечеткое число (ТНЧ) – нечеткое число $< a, \alpha, \beta >_{\triangle}$, функция принадлежности которого представлена треугольной функцией:

$$\mu_{\triangle}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \text{если } b < x \le c \\ 0, & \text{если } x > c \end{cases}, \tag{6.12}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ – параметры функции, связанные отношением $a \le b \le c$.

При этом $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$.

Трапециевидный нечеткий интервал (ТНИ) – нормальный нечеткий интервал $< a, b, \alpha, \beta >_T$, функция принадлежности которого представлена трапециевидной функцией:

$$\mu_T(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b \\ 1, & \text{если } b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{если } c < x < d \\ 0, & \text{если } x \ge d \end{cases}, \tag{6.13}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ – параметры функции, связанные отношением $a \le b \le c \le d$.

При этом $\alpha = b - a$, $\beta = d - c$.

В качестве примера ТНЧ можно взять «нечеткую тройку» <3,1,2> (рис. 6.7). Примером ТНИ служит «нечеткий интервал от 4 до 6» <4,6,2,1> (рис. 6.8).

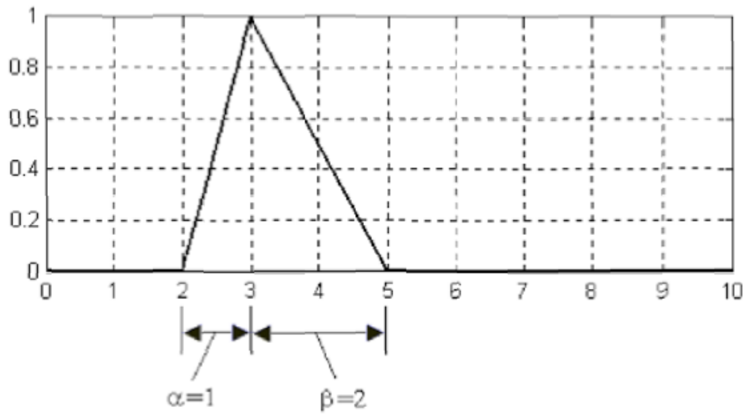

Рис. 6.7. График ТНЧ «нечеткая тройка»

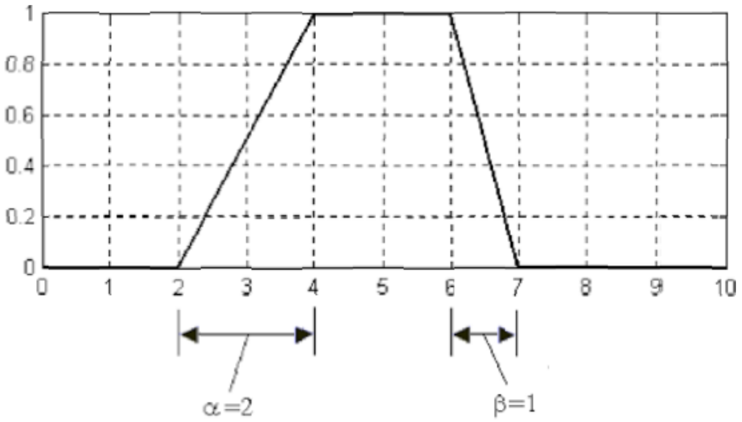

Рис. 6.8. График ТНИ «нечеткий интервал от 4 до 6»

Для оперирования ТНЧ и ТНИ используют те же формулы, что и для (L-R)-функций общего типа.

Задание на выполнение практической работы

Выполнить арифметические операции с нечеткими величинами согласно табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вариант	**Задание**
1	$<1,1,1>_{\square} + <3,2,2>_{\square}$
2	$<-4,2,2>_{\square} + <1,1,1>_{\square}$
3	$<1,1,1>_{\square} \cdot <3,2,2>_{\square}$
4	$<7,2,2>_{\square} - <3,2,2>_{\square}$
5	$<4,1,1>_{\square} + <2,2,2>_{\square}$
6	$<8,3,3>_{\square} / <4,1,1>_{\square}$
7	$<8,3,3>_{\square} \cdot <4,1,1>_{\square}$
8	$<5,3,3>_{\square} \cdot <1,2,2>_{\square}$
9	$<5,3,3>_{\square} / <1,3,3>_{\square}$
10	$<7,3,3>_{\square} / <7,2,2>_{\square}$
11	$<8,4,4>_{\square} - <7,4,4>_{\square}$
12	$<9,4,4>_{\square} - <8,2,2>_{\square}$
13	$<3,1,1>_{\square} - <3,3,3>_{\square}$
14	$<3,1,1>_{\square} \cdot <3,3,3>_{\square}$
15	$<3,1,1>_{\square} / <3,3,3>_{\square}$
16	$<2,2,2>_{\square} / <2,1,1>_{\square}$

Контрольные вопросы

1 Что такое нечеткая величина и чем она отличается от нечеткого множества?
2 Представление и виды нечетких величин.
3 Какие операции могут быть применены к нечетким величинам?

Учебное издание

Суханов Андрей Валерьевич

Лященко Зоя Владимировна

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.И. Исаева

Подписано в печать 05.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,09.
Тираж экз. Изд. № 90398. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.